Über die Verallgemeinerung einer Erweiterung von Ringen

Von J. SZENDREI in Szeged

Herrn Prof. B. Szőkefalvi-Nagy zum 60. Geburtstag gewidmet

1. R und R_1, R_2 bezeichnen einen beliebigen (assoziativen) Ring bzw. zwei echte Unterringe von R. Läßt sich jedes Element $r(\in R)$ als eine Summe von der Form

$$r = r_1 + r_2 \qquad (r_1 \in R_1,\ r_2 \in R_2),$$

aufschreiben, d.h. gilt

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+,$$

wo das oben angesetzte „$+$" den Modul eines Ringes bezeichnet, so wird R *in Bezug auf die Addition* (im allgemeineren Sinne) *zerlegbar* genannt.

Als Umkehrung tritt das Erweiterungsproblem auf, aus gegebenen Ringen S_1, S_2 alle Ringe R mit

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+, \quad S_1 \simeq R_1, \quad S_2 \simeq R_2$$

zu bestimmen.

Für diese Ringkonstruktion leistet der Ring Z der ganzen Zahlen ein einfaches Beispiel. Sind nämlich die ganzen Zahlen a_1, a_2 teilerfremd, so ist $Z^+ = (a_1)^+ + (a_2)^+$, d.h. Z ist (im allgemeineren Sinne) zerlegbar.

Im Spezialfall $R_1 \cap R_2 = 0$ hat J. Szép [3] dieses Erweiterungsproblem gelöst, und weitere Eigenschaften dieser Konstruktion wurden in den Arbeiten [3, 4] untersucht.

Es sei bemerkt, daß das entsprechende gruppentheoretische Problem, d.h. die Verallgemeinerung des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio von L. Rédei und J. Szép [1] gelöst wurde.

2. Wir bezeichnen die Elemente von S_1 mit $0, a, b, \ldots$ und diejenigen von S_2 mit $o, \alpha, \beta, \ldots$. In der Menge $\mathbf{R}$ der (geordneten) Paare (a, α) $(a \in S_1, \alpha \in S_2)$ definieren wir die Addition und die Multiplikation auf die folgende Weise:

(1) $$(a,\alpha) + (b,\beta) = (a+b,\ \alpha+\beta),$$

(2) $$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + a^\beta + {}^\alpha b,\ \alpha^b + {}^a\beta + \alpha\beta),$$

wobei die Funktionen

$$a^{\beta}, {}^{\alpha}b \in S_1, \alpha^{b}, {}^{a}\beta \in S_2 \tag{3}$$

den folgenden Bedingungen

$$0^{\alpha} = a^{o} = {}^{\alpha}0 = {}^{o}a = 0, \tag{4}$$

$$o^{a} = \alpha^{0} = {}^{a}o = {}^{0}\alpha = o \tag{5}$$

unterworfen sind.

Die sämtlichen Lösungen unseres Problems (bis auf Isomorphie) ergeben sich als Faktorstrukturen von R nach gewissen Kongruenzrelationen.

Es gilt der folgende

Satz. *Sind $S_1^*(\subseteqq S_1)$, $S_2^*(\subseteqq S_2)$ isomorphe Unterringe von S_1, bzw. S_2 mit dem Isomorphismus*

$$A\colon s_* \to As_* \tag{6}$$

angegeben, so definiert man in R die Äquivalenzrelation

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Leftrightarrow A(b-a) = -(\beta - \alpha). \tag{7}$$

Damit diese Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation C von $\mathbf{R}$ und die zugehörige Faktorstruktur $\mathbf{R}/C$ ein Ring ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionen (3) *(außer* (4) *und* (5)*) die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$A({}^{\alpha}a_*) = \alpha(Aa_*) + \alpha^{a}, \tag{8}$$

$$A^{-1}({}^{a}\alpha_*) = a(A^{-1}\alpha_*) - a^{\alpha_*}, \tag{9}$$

$$A(a_*^{\alpha}) = (Aa_*)\alpha - {}^{a_*}\alpha, \tag{10}$$

$$A^{-1}(\alpha_*^{a}) = (A^{-1}\alpha_*)a - {}^{\alpha_*}a, \tag{11}$$

$$A\left(a(b^{\gamma}) + a^{b_\gamma} - (ab)^{\gamma}\right) = -\left({}^{a}({}^{b}\gamma) - {}^{ab}\gamma\right), \tag{12}$$

$$A\left({}^{\alpha}(bc) - ({}^{\alpha}b)c - {}^{(\alpha^{b})}c\right) = -\left(\alpha^{bc} - (\alpha^{b})^{c}\right), \tag{13}$$

$$A\left(a^{\beta\gamma} - (a^{\beta})^{\gamma}\right) = -\left({}^{a}({}^{\beta}\gamma) - {}^{a}({}^{\beta}\gamma) - {}^{(a\beta)}\gamma\right), \tag{14}$$

$$A\left({}^{\alpha}({}^{\beta}c) - {}^{\alpha\beta}c\right) = -\left(\alpha(\beta^{c}) + \alpha^{\beta_c} - (\alpha\beta)^{c}\right), \tag{15}$$

$$A\left(a({}^{\beta}c) + a^{(\beta^{c})} - (a^{\beta})c - {}^{(a\beta)}c\right) = -\left({}^{a}(\beta^{c}) - ({}^{a}\beta)^{c}\right), \tag{16}$$

$$A\left({}^{\alpha}(b^{\gamma}) - ({}^{\alpha}b)^{\gamma}\right) = -\left(\alpha({}^{b}\gamma) + \alpha^{(b\gamma)} - (\alpha^{b})\gamma - {}^{(\alpha_b)}\gamma\right., \tag{17}$$

$$A\left({}^{\alpha}b + {}^{\alpha}c - {}^{\alpha}(b+c)\right) = -(\alpha^{b} + \alpha^{c} - \alpha^{b+c}), \tag{18}$$

$$A\left(a^{\beta} + a^{\gamma} - a^{\beta+\gamma}\right) = -\left({}^{a}\beta + {}^{a}\gamma - {}^{a}(\beta+\gamma)\right), \tag{19}$$

$$A\left(a^{\gamma} + b^{\gamma} - (a+b)^{\gamma}\right) = -({}^{a}\gamma + {}^{b}\gamma - {}^{a+b}\gamma), \tag{20}$$

$$A\left({}^{\alpha}c + {}^{\beta}c - {}^{\alpha+\beta}c\right) = -\left(\alpha^{c} + \beta^{c} - (\alpha+\beta)^{c}\right). \tag{21}$$

Diese Ringe $R = \mathbf{R}/C$ *sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Lösungen des aufgestellten Problems. In dem Ring* R *bilden die Elemente* $\overline{(a, o)}$, *bzw.* $\overline{(0, \alpha)}$ *je einen Unterring* R_1, R_2, *für die* $R^+ = R_1^+ + R_2^+$, $R_1 \simeq S_1$, $R_2 \simeq S_1$ *gelten. Der Durchschnitt* $R_1 \cap R_2$ *ist isomorph mit* S_1^* *(und mit* S_2^**), und zwar sind die Elemente* $\overline{(a_*, o)}$ *die sämtlichen verschiedenen Elemente dieses Durchschnitts.*

Den Beweis des Satzes bekommen wir in mehreren Schritten. Aus der Definition der Relation (7) folgt unmittelbar, daß diese Relation eine Äquivalenzrelation ist. Jetzt werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß die Relation (7) eine Kongruenz in $\mathbf{R}$ ist. Man kann annehmen, daß zwei beliebige äquivalente Elemente in $\mathbf{R}$ die Form

$$(a, \alpha), \qquad (a + a_*, \ \alpha - Aa_*)$$

haben. Diese Elemente sind kongruent dann und nur dann, wenn aus

$$(a, \alpha) = (a + a_*, \alpha - A\alpha_*)$$

für beliebige $(r, \varrho) \in \mathbf{R}$ die Relationen

$$(a, \alpha) + (r, \varrho) \equiv (a + a_*, \alpha - Aa_*) + (r, \varrho),$$

$$(r, \varrho)(a, \alpha) = (r, \varrho)(a + a_*, \alpha - Aa_*),$$

$$(a, \alpha)(r, \varrho) = (a + a_*, \alpha - Aa_*)(r, \varrho)$$

folgen. Die erste ist trivial. Aus den zwei letzten erhalten wir die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(22) \quad A\big(ra_* + r^{\alpha - Aa_*} + {}^{\varrho}(a + a_*) - r^{\alpha} - {}^{\varrho}a\big) = -(\varrho^{a + a_*} + {}^{r}(\alpha - Aa_*) - \varrho(Aa_*) - {}^{r}\alpha - \varrho^{a}),$$

$$(23) \quad A\big(a_* r + (a + a_*)^{\varrho} + {}^{\alpha - Aa_*}r - a^{\varrho} - {}^{\alpha}r\big) = -\big((\alpha - Aa_*)^{r} + {}^{a - a_*}\varrho - (Aa_*)\varrho - \alpha^{r} - {}^{a}\varrho\big).$$

Nachdem setzen wir die Bedingungen (22), (23), d.h. die Existenz die Faktorstruktur $\mathbf{R}/C$ voraus. Jetzt wollen wir die Bedingungen aufstellen, damit $\mathbf{R}/C$ ein Ring ist. Es ist offenbar nach der Definition der Addition in R/C, daß R/C einen Modul bildet. Deshalb ist $\mathbf{R}/C$ ein Ring dann und nur dann, wenn die Multiplikation in $\mathbf{R}/C$ assoziativ und distributiv ist.

Aus der linksseitigen Distributivität

$$(a, \alpha)\big((b, \beta) + (c, \gamma)\big) \equiv (a, \alpha)(b, \beta) + (a, \alpha)(a, \gamma)$$

ergibt sich die Gleichung

$$(24) \quad A\big(a^{\beta} + a^{\gamma} + {}^{\alpha}b + {}^{\alpha}c - a^{\beta + \gamma} - {}^{\alpha}(b + c)\big) = -(\alpha^{b} + {}^{a}\beta + \alpha^{c} + {}^{a}\gamma(\beta + \gamma) - \alpha^{b + c}).$$

Wenn wir in (24) $a=0$, $\beta=\gamma=o$, bzw. $b=c=0$, $\gamma=0$ setzen, so entstehen (18), bzw. (19). Umgekehrt, (24) ergibt sich aus (18) und (19) durch Addition.

Ähnlicherweise bekommen wir die Gleichungen (20), (21) aus der rechtsseitigen Distributivität.

Wegen der Definition der Addition gilt $(a, \alpha) = (a, o)+(0, \alpha)$, deshalb ist es genügend die Assoziativität der Multiplikation für die Elemente von der Form (a, o) und $(0, \alpha)$ zu beweisen. Es kommen die folgenden Produkte

$$\begin{array}{ll} (a,o)(b,o)(c,o), & (0,\alpha)(0,\beta)(0,\gamma) \\ (a,o)(b,o)(0,\gamma), & (0,\alpha)(b,o)(c,o) \\ (a,o)(0,\beta)(0,\gamma), & (0,\alpha)(0,\beta)(c,o) \\ (a,o)(0,\beta)(c,o), & (0,\alpha)(b,o)(0,\gamma) \end{array}$$

in Betracht. Für die zwei ersten Produkte ist die Assoziativität trivial; die folgenden sind mit den Bedingungen (12)—(17) äquivalent.

Bisher haben wir gezeigt, daß $\mathbf{R}/C$ dann und nur dann (existiert und) ein Ring ist, wenn (12)—(23) gelten.

Jetzt werden wir zeigen, daß die Bedingungen (22), (23) unter Berücksichtigung von (12)—(21) mit der Gleichungen (8)—(11) äquivalent sind.

Aus (22) folgen für $a=r=0$, bzw. für $\alpha=\varrho=o$ die Gleichungen (8) und

$$A(ra_* + r^{-Aa_*}) = -^r(-Aa_*). \tag{25}$$

Hieraus folgt die Gleichung (9) durch die Ersetzungen $-Aa_*=\alpha_*$, und $r=a$. Umgekehrt wird es gezeigt, daß aus (8), (9) die Gleichung (22) folgt. Nach (18) gilt nämlich

$$A\left({}^{\varrho}a + {}^{\varrho}a_* - {}^{\varrho}(a+a_*)\right) = -(\varrho^a + \varrho^{a_*} - \varrho^{a+a_*}),$$

und daraus ergibt sich

$$A\left({}^{\varrho}(a+a_*) - {}^{\varrho}a\right) = A({}^{\varrho}a_*) + (\varrho^a + \varrho^{a_*} - \varrho^{a+a_*}). \tag{25}$$

Wenn man hier statt $A(\varrho a_*)$ nach (8) $\varrho(Aa_*)+\varrho^a$ setzt, dann bekommt man:

$$A\left({}^{\varrho}(a+a_*) - {}^{\varrho}a\right) = -\left(\varrho^{a+a_*} - \varrho^a - \varrho(Aa_*)\right). \tag{26}$$

Aus (14) ergibt sich (25). Durch Addition von (25) und (26) entsteht (22). Ähnlicherweise kann die Äquivalenz der Bedingungen (29) und (10), (11) gezeigt werden. Damit haben wir beweisen, daß $\mathbf{R}/C$ dann und nur dann ein Ring ist, wenn (8) bis (21) gelten.

Betrachten wir nunmehr den Ring $\mathbf{R}/C$. Es ist klar, daß die Elemente $\overline{(a, o)}$, bzw. $\overline{(0, \alpha)}$ je einen Unterring R_1, bzw. R_2 von R/C bilden und

$$\mathbf{R}/C = R_1^+ + R_2^+, \quad R_1 \simeq S_1, \quad R_2 \simeq S_2$$

gelten. Der Durchschnitt D von R_1 und R_2 besteht aus denjenigen Elementen $\overline{(a, 0)}$, die sich auch als $\overline{(0, \alpha)}$ schreiben lassen. Da nach (7) gilt $\overline{(a, o)} = \overline{(0, \alpha)}$ dann und nur dann, wenn $Aa = \alpha$ gilt, so folgt hieraus, daß D aus den Elementen $\overline{(a^*, o)}$ besteht und diese Elemente auch schon verschieden sind, ferner die Isomorphie $D \simeq S_1^*(\simeq S_2^*)$ gilt. Das bedeutet, daß jeder Ring $\mathbf{R}/C$ eine Lösung unseres Problems gibt.

Wir haben noch zu zeigen, daß umgekehrt jede Lösung des aufgestellten Erweiterungsproblems (bis auf Isomorphie) unter den im Satz angegeben Ringen $\mathbf{R}/C$ vorkommt. Es kann aufgenommen werden, daß R eine Lösung ist, d.h.

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+, \quad S_1 \simeq R_1, \quad S_2 \simeq R_2$$

gelten, wobei R_1, R_2 Unterringe von R sind. Jedes Element in R hat die Form $a+\alpha$ $(a \in R_1; a \in R_2)$; $a+\alpha = b+\beta$ dann und nur dann, wenn $b-a = -(\beta-\alpha) \in \in R_1 \cap R_2$. Hat ein Element in R die Form $a\alpha$, bzw. αa, so läßt es sich auch in der Form

$$a\alpha = a^\alpha + {}^a\alpha, \text{ bzw. } \alpha a = {}^\alpha a + \alpha^a$$

schreiben, wobei $a^\alpha, {}^\alpha a \in R_1$ und ${}^a\alpha, \alpha^a \in R_2$. Hiernach haben wir:

$$(a+\alpha)+(b+\beta) = (a+b)+(\alpha+\beta),$$

$$(a+\alpha)(b+\beta) = ab+a\beta+\alpha b+\alpha\beta = (ab+a^\beta+{}^\alpha b)+(\alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta).$$

Ist insbesondere $0\alpha = \alpha 0 = 0$ und $0a = a0 = 0$, so wird aufgenommen, daß (4), (5) gelten. Wegen (3)—(5) ist R eine Struktur (mit zwei Verknüpfungen) und wegen (1), (2) und (27), (28) gilt die Homomorphie

$$\mathbf{R} \sim R((a, \alpha) \to a+\alpha).$$

Ist C die zugehörige kompatible Klasseneinteilung von $\mathbf{R}$, so entsteht die Isomorphie

$$\mathbf{R}/C \simeq R.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. Rédei und J. Szép, Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 165—170.
[2] J. Szendrei, Über die Szépschen Ringerweiterungen, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 166—172.
[3] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. I, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 51—62.
[4] J. Szép, Über eine neue Erweiterung von Ringen. II, *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 202—214.

(Eingegangen am 15. Juli 1972)